

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Theoretische Informatik II
1. Übungsblatt vom 22.4.2004

Aufgabe 1: Partitionen und Äquivalenzrelationen

Es sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge S . Für $s, t \in S$ verwendet man die Notation $(s, t) \in R$ oder sRt oder $s \equiv_R t$, um die Äquivalenz von s und t zu bezeichnen. Für $s \in S$ heißt die Menge $[s]_R = \{t \in S \mid (t, s) \in R\}$ die Äquivalenzklasse des Elements s . Beweisen Sie, dass jede Äquivalenzrelation R auf einer Menge S diese Menge in nicht-leere paarweise disjunkte Äquivalenzklassen unterteilt, dass also das Mengensystem $S/R := \{[s]_R \mid s \in S\}$ eine Partition auf S ist. Definieren Sie umgekehrt zu jeder Partition eine Äquivalenzrelation, deren Äquivalenzklasseneinteilung die gegebene Partition ist.

Aufgabe 2: Hüllenbildungen für Relationen

Machen Sie sich am Beispiel der Relation $R = \{(a, b), (b, c)\}$ über der Menge $S = \{a, b, c\}$ die verschiedenen Möglichkeiten der Hüllenbildung klar. (Hinweis: reflexive -, transitive -, reflexiv-transitive -, symmetrische Hülle, ...)

Aufgabe 3: Transitiv Hülle und reflexiv-transitive Hülle

Das Produkt zweier Relationen U und V auf S ist definiert durch

$$U \circ V := \{(s, t) \in S \times S \mid \text{es gibt } w \in S \text{ mit } (s, w) \in U \text{ und } (w, t) \in V\}$$

Definieren Sie $R^+ := \bigcup_{i \geq 1} R^i$, $R^* := \bigcup_{i \geq 0} R^i$ wobei $R^0 := \{(s, s) \mid s \in S\}$ und für $n \geq 0$ $R^{n+1} := R^n \circ R$ ist.

- (i) Zeigen Sie, dass eine zweistellige Relation R auf S genau dann transitiv ist, wenn $R = R^+$ gilt und genau dann reflexiv und transitiv ist, wenn $R = R^*$ gilt.
- (ii) Berechnen Sie R^+ und R^* für die Relation $R := \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ auf der Menge \mathbb{N} .

Aufgabe 4: Happy Birthday

Beweisen Sie die Aussage:

Wenn in einem Raum 25 Personen sind, dann gibt es unter ihnen mindestens 3 Personen, die im selben Monat Geburtstag haben.