

- $\mathbf{N} := \{0,1,2,\dots\}$  Menge der natürlichen Zahlen
- $\emptyset := \{\} :=$  die *leere Menge*
- $\{a\} =$  *Einermenge* mit Element  $a$
- $\{a_1, \dots, a_n\}$  (*aufzählende Form* einer Menge)
- $\{x \mid E(x)\}$  (Menge mit definierender Eigenschaft  $E(x)$ )
- $\{x \in M \mid E(x)\} := \{x \mid x \in M \wedge E(x)\}$
- $x \in M :\Leftrightarrow x$  ist *Element* der Menge  $M$
- $x \notin M :\Leftrightarrow x$  ist *nicht Element* der Menge  $M$
- $X \subseteq Y :\Leftrightarrow \forall x (x \in X \rightarrow x \in Y)$  (*Teilmenge, Inklusion*)
- $\wp(M) := \{ T \mid T \subseteq M \}$  (*Potenzmenge*)
- $\wp_e(M) := \{ T \mid T \subseteq M \wedge T \text{ endlich} \}$  (*Menge der endlichen Teilmengen*)
- $X \subset Y :\Leftrightarrow X \subseteq Y \wedge X \neq Y$  (*echte Teilmenge*)
- $X \cap Y := \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$  (*Schnitt*)
- $X \cup Y := \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$  (*Vereinigung*)
- $X - Y := \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$  (*Differenz*)
- $\bar{X} := G - X$  (*Komplement* bzgl. der Grundmenge  $G$ )

- $NEU := ALT \quad :\Leftrightarrow$  NEU ist definitionsgemäß gleich ALT
- $NEU :\Leftrightarrow ALT \quad :\Leftrightarrow$  NEU ist definitionsgemäß äquivalent zu ALT
- $\neg A \quad :\Leftrightarrow$  nicht A (Negation)
- $A \wedge B \quad :\Leftrightarrow$  A und B (Konjunktion)
- $A \vee B \quad :\Leftrightarrow$  A oder B (Disjunktion)
- $A \rightarrow B \quad :\Leftrightarrow$  wenn A, dann B (Implikation)
- $A \leftrightarrow B \quad :\Leftrightarrow$  A genau dann, wenn B  
(logische Äquivalenz)
- $\forall x A \quad :\Leftrightarrow$  für alle x gilt A (Allquantor)
- $\forall x \in M : A \quad :\Leftrightarrow \forall x (x \in M \rightarrow A)$   
(relativierter Allquantor)
- $\exists x A \quad :\Leftrightarrow$  es gibt (mindestens) ein x mit A  
(Existenzquantor)
- $\exists x \in M : A \quad :\Leftrightarrow \exists x (x \in M \wedge A)$   
(relativierter Existenzquantor)

- $(M, o, e)$  ist ein *Monoid*  $:\Leftrightarrow$

$M$  Menge  $\wedge o : M \times M \rightarrow M \wedge e \in M$

$\wedge \forall x, y, z \in M : (x o y) o z = x o (y o z)$  (*Assoziativität*)

$\wedge \forall x \in M : e o x = x = x o e$  (*e neutral bzgl. o*)

- $(T, o, e)$  ist ein *durch*  $E \subseteq M$  *erzeugtes Teil-Monoid* des Monoids  $(M, o, e)$   $:\Leftrightarrow$

Jedes  $x \in T - \{e\}$  hat die Form  $x = y_1 o \dots o y_n$  mit  $y_1, \dots, y_n \in E$ .

- $T$  ist durch  $E$  *frei* erzeugt, wenn für  $x_1, \dots, x_m \in E$  außerdem gilt:

$$x_1 o \dots o x_m = y_1 o \dots o y_n \rightarrow m = n \wedge x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n$$

- $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$  *Alphabet* (endlich, nichtleer)
- $\Sigma^*$  := Menge aller endlichen Folgen (*Wörter*) über  $\Sigma$
- $\varepsilon$  := *leeres Wort*
- $\Sigma^+ := \Sigma^* - \{\varepsilon\}$  (nichtleere Wörter)
- $\text{conc} : \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  (*Konkatenation*)
- $\text{conc}(a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_m) := a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$  ;  $uv = \text{conc}(u, v)$
- $|a_1 \dots a_n| := n$  ;  $|\varepsilon| := 0$  (*Länge*)
- **Satz**  $(\Sigma^*, \text{conc}, \varepsilon)$  ist ein Monoid.

Potenzen in Monoiden:

- $x^0 := e$  ;  $x^{n+1} := x \circ x^n$

Geordnete Paare:

- $(x, y)$  ist ein *geordnetes Paar*;  $x$  ist seine 1. Komponente,  $y$  seine 2. Komponente.
- **Axiom der geordneten Paare:**  $(x, y) = (u, v) \leftrightarrow x = u \wedge y = v$

Produktmenge und Tupel:

- $A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$  (*Produktmenge*)
- $(x_1, \dots, x_n)$  ist ein (*geordnetes*) *n-Tupel* ( $n \geq 2$ ).
- $A_1 \times \dots \times A_n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n\}$  (*Produktmenge*)

- Eine (*zweistellige*) *Relation* ist eine Menge von Paaren.
- Eine *n-stellige Relation* ist eine Menge von n-Tupeln.
- $R$  ist *Relation aus A in B* :  $\Leftrightarrow R \subseteq A \times B$  .
- $R$  ist *Relation auf A* :  $\Leftrightarrow R \subseteq A \times A$  .
- $\text{Id}_A := \{(x, x) \mid x \in A\}$  (*Identitätsrelation auf A*)
- $x R y \Leftrightarrow (x, y) \in R$
- $R^{-1} := \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$  (*Inverse Relation zu R*)
- $x R^{-1} y \Leftrightarrow y R x$
- $R \circ S := \{(x, z) \mid \exists y ((x R y) \wedge (y S z))\}$  (*Komposition von Relationen*)
- $x (R \circ S) z \Leftrightarrow \exists y ((x R y) \wedge (y S z))$
- **Satz:**  $(\wp(A \times A), \circ, \text{Id}_A)$  ist ein Monoid (*Relationen-Monoid*).
- $R^* := \cup \{ R^n \mid n \in \mathbf{N} \}$  (*reflexiv-transitive Hülle*)
- $R^+ := \cup \{ R^n \mid n \in \mathbf{N} - \{0\} \}$  (*transitive Hülle*)

- $R$  ist *reflexiv auf*  $A : \Leftrightarrow \forall x \in A : x R x$
- $R$  ist *symmetrisch* :  $\Leftrightarrow \forall x, y : (x R y \rightarrow y R x)$
- $R$  ist *antisymmetrisch* :  $\Leftrightarrow \forall x, y : (x R y \wedge y R x \rightarrow x = y)$
- $R$  ist *transitiv* :  $\Leftrightarrow \forall x, y, z : (x R y \wedge y R z \rightarrow x R z)$
- $(x, y)$  ist *R-vergleichbar* :  $\Leftrightarrow x R y \vee y R x$
- $R$  ist *Halbordnung (partielle Ordnung) auf*  $A : \Leftrightarrow$

$R$  ist reflexiv auf  $A \wedge R$  ist transitiv  $\wedge R$  ist antisymmetrisch

- $R$  ist *totale Ordnung auf*  $A : \Leftrightarrow$

$R$  ist Halbordnung auf  $A \wedge \forall x, y \in A : (x, y)$  ist *R-vergleichbar*

- $R$  ist *Äquivalenzrelation auf A*  $\Leftrightarrow R$  ist reflexiv auf A  $\wedge R$  ist transitiv  $\wedge R$  ist symmetrisch
- $x R := \{ y \mid x R y \}$  (*R-Nachfolger-Menge* von x)
- $[x]_R := x R$  (*Äquivalenzklasse*, wenn R Äquivalenzrelation ist)
- $R y := \{ x \mid x R y \}$  (*R-Vorgänger-Menge* von y)
- $X R := \{ y \mid \exists x \in X : x R y \}$  (*R-Bild* von X),  $R Y := \{ x \mid \exists y \in Y : x R y \}$
- $Z$  ist *Zerlegung (Partition)* von A  $\Leftrightarrow$   

$$\emptyset \notin Z \subseteq \wp(A) \wedge \cup Z = A \wedge \forall B_1, B_2 \in Z: (B_1 \neq B_2 \rightarrow B_1 \cap B_2 = \emptyset)$$
- Eine Äquivalenzrelation R hat *endlichen Index*, wenn sie nur endlich viele Äquivalenzklassen besitzt. Hat sie genau m Äquivalenzklassen, so sei  $Index(R) := m$ .
- **Satz:** Die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation auf A bilden eine Zerlegung von A.
- $R$  ist *rechtseindeutig*  $\Leftrightarrow \forall x, y, z : (x R y \wedge x R z \rightarrow y = z)$
- $R$  ist *linkseindeutig*  $\Leftrightarrow \forall x, y, z : (x R z \wedge y R z \rightarrow x = y)$

- $f = (F, A, B)$  ist (*partielle*) *Funktion (aus A in B)*  $:\Leftrightarrow F \subseteq A \times B \wedge F$  ist rechtseindeutig
- $A$  *Quellbereich (domain)*,  $B$  *Zielbereich (codomain)*
- $\text{graph}(f) := F$  (*Graph von f*)
- $\text{dom}(f) := F B = \{x \mid \exists y \in B : x F y\}$  (*Definitionsbereich*)
- $f$  ist *totale Funktion*  $:\Leftrightarrow f$  ist partielle Funktion  $\wedge \text{dom}(f) = A$
- $f : A \rightarrow B$   $:\Leftrightarrow \exists F: f = (F, A, B)$  ist partielle Funktion
- $f : A \rightarrow B$  wird auch zur Bezeichnung der Funktion  $f = (\text{graph}(f), A, B)$  benutzt.
- Für  $x \in \text{dom}(f)$  bezeichnet  $f(x)$  den (eindeutig bestimmten) *Funktionswert*  $y$  mit  $x F y$ .
- $y = f(x) \Leftrightarrow x F y$
- $\langle x \mapsto t \rangle$  bezeichnet die Funktion, die jedem  $x$  den durch den Term  $t$  gegebenen Wert zuordnet ( äquivalent ist der *Lambda-Term*  $(\lambda x . t)$  ).

- *Funktionskomposition* ( *g nach f*): Sei  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$  .

$$g \circ f := \langle x \mapsto g(f(x)) \rangle : A \rightarrow C$$

- $\text{id}_A := (\text{Id}_A, A, A)$  (*Identitätsfunktion auf A*)
- **Satz:** Die Menge aller partiellen Funktionen auf A bildet mit der Funktionskomposition und der Identitätsfunktion ein Monoid.
- $f : A \rightarrow B$  ist *injektiv*  $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \text{dom}(f) : (f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2)$
- $f : A \rightarrow B$  ist *surjektiv*  $\Leftrightarrow \forall y \in B : \exists x \in \text{dom}(f) : y = f(x)$
- $f : A \rightarrow B$  ist *bijektiv*  $\Leftrightarrow f$  ist total, injektiv und surjektiv
- $f : A \rightarrow B$  ist *invertierbar*  $\Leftrightarrow \exists g : B \rightarrow A : (g \circ f = \text{id}_A \wedge f \circ g = \text{id}_B)$
- **Satz:**  $f$  ist invertierbar  $\Leftrightarrow f$  ist bijektiv.
- **Satz/Definition:** Ist  $f : A \rightarrow B$  invertierbar, so gibt es genau eine *inverse Funktion*  $f^{-1}$
- mit  $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$  und  $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$  .
- $\text{graph}(f^{-1}) = (\text{graph}(f))^{-1}$

- Zwei Mengen  $A$  und  $B$  sind *gleichmächtig* ( $|A| = |B|$ ) genau dann, wenn es eine bijektive Funktion  $f : A \rightarrow B$  gibt.
- $A$  ist *abzählbar*  $:\Leftrightarrow |A| = |\mathbf{N}|$
- **O-Notation:** Für eine Funktion  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  ist

$$O(f(n)) := \{ g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \mid \exists c, n_0 \in \mathbf{N} : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n) \} .$$

Statt " $g \in O(f(n))$ " wird auch " $g(n) = O(f(n))$ " geschrieben.

- **Schubfachprinzip:** Bei der Verteilung von  $m$  Objekten auf  $n$  Fächer kommen in mindestens ein Fach mindestens zwei Objekte, wenn  $m > n$  ist (genauer: mindestens  $((m - 1) \text{div } n) + 1$  Objekte).
- *Liften* von Funktionen:

$$f : A \rightarrow B \text{ wird zugeordnet } f^{\sim} := \langle X \mapsto \{ f(x) \mid x \in X \} \rangle : \wp(A) \rightarrow \wp(B)$$

- Umwandlung von Relationen in Funktionen:

$$R \subseteq A \times B \text{ wird zugeordnet } R^{\sim} := \langle x \mapsto x R \rangle : A \rightarrow \wp(B)$$

- *Charakteristische Funktion*  $\chi_A$  einer Teilmenge  $A$  von  $G$  :

$$\chi_A(x) = \mathbf{if} \ x \in A \ \mathbf{then} \ 1 \ \mathbf{else} \ 0$$

## Strukturverträglichkeit, Morphismen:

- $h : M_1 \rightarrow M_2$  ist ein *Monoid-Homomorphismus* (von  $(M_1, o_1, e_1)$  in  $(M_2, o_2, e_2)$ ) : $\Leftrightarrow$

$$\forall x, y \in M_1: h(x \ o_1 \ y) = h(x) \ o_2 \ h(y) \ \wedge \ h(e_1) = e_2$$

- $h : M_1 \rightarrow M_2$  ist eine *monotone Funktion (Ordnungs-Homomorphismus)* (von  $(M_1, \leq_1)$  in  $(M_2, \leq_2)$ ) : $\Leftrightarrow$

$$\forall x, y \in M_1: (x \leq_1 y \rightarrow h(x) \leq_2 h(y))$$

- $R \subseteq M \times M$  ist *verträglich mit*  $o : M \times M \rightarrow M$  : $\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in M: x_1 \ R \ y_1 \ \wedge \ x_2 \ R \ y_2 \rightarrow (x_1 \ o \ x_2) \ R \ (y_1 \ o \ y_2)$$

- Eine *Kongruenzrelation* auf einer algebraischen Struktur ist eine Äquivalenzrelation, die mit allen Operationen der Struktur verträglich ist.

- *Basistypen*: int, nat, bool, char,...
- *Produkttyp*:  $\text{typ}_1 \times \text{typ}_2$
- *Alternativtyp*:  $\text{typ}_1 \mid \text{typ}_2$  (disjunkte Vereinigung)
- *Funktionstyp*:  $\text{typ}_1 \rightarrow \text{typ}_2$
- $x : t \Leftrightarrow x \text{ hat Typ } t$

- $G = (P, K, \text{quelle}, \text{ziel})$  ist ein *gerichteter Graph* (mit *Punktmenge*  $P$  und *Kantenmenge*  $K$ ) : $\leftrightarrow$   
 $\text{quelle}, \text{ziel} : K \rightarrow P$
- $G = (P, K, v)$  ist ein *ungerichteter Graph* (mit *Punktmenge*  $P$  und *Kantenmenge*  $K$ ) : $\leftrightarrow$   
 $v : K \rightarrow \{ \{x, y\} \mid x, y \in P \}$
- $v(k) = \{a, b\} \leftrightarrow$  Die Kante  $k$  hat die Endpunkte  $a$  und  $b$ .
- $pf = \langle p_0, k_1, p_1, \dots, k_n, p_n \rangle$  ist ein *(a,b)-Pfad* der *Länge*  $n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) im gerichteten Graphen  $G$  : $\leftrightarrow$   
 $p_0, p_1, \dots, p_n \in P \wedge k_1, \dots, k_n \in K \wedge p_0 = a \wedge p_n = b \wedge$   
 $\forall i (1 \leq i \leq n \rightarrow \text{quelle}(k_i) = p_{i-1} \wedge \text{ziel}(k_i) = p_i)$
- [Für ungerichtete Graphen ersetze "  $\text{quelle}(k_i) = p_{i-1} \wedge \text{ziel}(k_i) = p_i$  " durch  
"  $v(k_i) = \{ p_{i-1}, p_i \}$  " ]
- $pf$  ist *geschlossen*, wenn  $p_0 = p_n$  gilt.

- $[a]_G := \{b \in P \mid \text{Es gibt einen (a,b)-Pfad in } G\}$  (*Erreichbarkeitsmenge* von  $a$  in  $G$ )
- Der ungerichtete Graph  $G$  ist *zusammenhängend*, wenn es zu jedem Punktpaar  $(a, b)$  einen  $(a, b)$ -Pfad gibt.
- Ein *Kreis* (in  $G$ ) ist ein geschlossener Pfad  $pf = \langle p_0, k_1, p_1, \dots, k_n, p_n \rangle$  im **ungerichteten** Graphen  $G$  mit  $\forall i, j (1 \leq i < j \leq n \rightarrow k_i \neq k_j \wedge p_i \neq p_j)$ .
- Ein *Zyklus* (in  $G$ ) ist ein geschlossener Pfad  $pf$  im **gerichteten** Graphen  $G$  mit  $\forall i, j (1 \leq i < j \leq n \rightarrow k_i \neq k_j \wedge p_i \neq p_j)$ .

- Ein *Baum* ist ein ungerichteter, zusammenhängender Graph ohne Kreise.
- Ein (*ungeordneter*) *Wurzelbaum* ist ein gerichteter, zusammenhängender Graph mit einem ausgezeichneten Punkt  $w$  (Wurzel), den keine Kante als Ziel hat, und in dem jeder von  $w$  verschiedene Punkt Ziel genau einer Kante ist.
- Ein *Blatt* ist ein Punkt, der nicht Quelle einer Kante ist.
- In einem *geordneten Wurzelbaum* ist zusätzlich für jeden Punkt  $p$  die Menge der Kanten mit Quelle  $p$  total geordnet.
- Ein *Binärbaum* ist ein geordneter Wurzelbaum, in dem von jedem Punkt, der kein Blatt ist, genau zwei Kanten ausgehen.
- **Satz:** Jeder Binärbaum mit mindestens  $2^k$  Blättern hat einen Pfad, dessen Länge mindestens  $k$  ist.

- $TS = (Sit, Akt, \rightarrow)$  ist ein *Transitionssystem*  $:\Leftrightarrow$

Sit ist eine Menge von *Situationen*,

Akt ist eine Menge von *Aktionen* und

$\rightarrow \subseteq Sit \times Akt \times Sit$  (*Transitionsrelation, Übergangsrelation*).

- $s_1 \xrightarrow{a} s_2 \Leftrightarrow s_1[a] s_2 \Leftrightarrow (s_1, a, s_2) \in \rightarrow$
- TS ist der Graph  $(Sit, \rightarrow, \langle (s_1, a, s_2) \mapsto s_1 \rangle, \langle (s_1, a, s_2) \mapsto s_2 \rangle)$  zugeordnet.
- TS ist *deterministisch*  $:\Leftrightarrow \forall s, s_1, s_2 \in Sit: \forall a \in Akt: s[a] s_1 \wedge s[a] s_2 \rightarrow s_1 = s_2$