

Übungen zur Vorlesung  
**Einführung in die Theoretische Informatik II**  
6. Übungsblatt vom 24.06.2004

**Aufgabe 24: Fallunterscheidung**

Seien  $f, g : \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{N}$  und  $R \subseteq \mathbb{N}^k$  primitiv rekursiv. Zeigen Sie, dass dann auch  $h := \langle \underline{x} \mapsto \text{if } R(\underline{x}) \text{ then } f(\underline{x}) \text{ else } g(\underline{x}) \text{ end} \rangle$  primitiv rekursiv ist.

**Aufgabe 25: Iteration**

Sei  $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  primitiv rekursiv, und sei  $F(x) := f^x(x)$ . [Hierbei ist:  $f^0(x) = x, f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ ]. Zeigen Sie, dass dann auch  $F$  primitiv rekursiv ist.

**Aufgabe 26: Primzahlen**

- (i) Zeigen Sie, dass die Menge der Primzahlen primitiv rekursiv ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass die Funktion  $p = \langle x \mapsto x\text{-te Primzahl} \rangle$  primitiv rekursiv ist.  
( $p(0) = 2, p(1) = 3, \dots$ )

**Aufgabe 27:**

- (i) Gibt es eine zweistellige primitiv rekursive Funktion  $F : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$  derart, dass es für jede einstellige primitiv rekursive Funktion  $f$  ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $\forall x \in \mathbb{N} : F(n, x) = f(x)$  ?
- (ii) Dieselbe Frage wie in (i), nur dass „primitiv rekursiv“ durch „ $\mu$ -rekursiv“ ersetzt wird.

**Aufgabe 28:**

- (i) Sei  $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  primitiv rekursiv und streng monoton, d.h.  $\forall x \in \mathbb{N} : f(x) < f(x+1)$ . Zeigen Sie, dass das Bild  $im(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$  von  $f$  eine primitiv rekursive Menge ist.
- (ii) Sei  $A \subseteq \mathbb{N}$  rekursiv aufzählbar und nicht leer. Zeigen Sie :  
Es existiert eine primitiv rekursive Funktion  $f$  mit  $A = im(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ .  
(Hinweis: verwenden Sie Kleene's Satz und benutzen Sie  $q_1, q_2$ , wo  $\langle q_1, q_2 \rangle$ , die Inverse der Paarungsfunktion  $paarcod(x, y) = \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1) + y$  ist.)

**Aufgabe 29:**

Als Code für Turingmaschinen werden Wörter in  $\{0,1\}^*$  verwendet. Wenn  $M_w$  die  $TM$  mit dem Codewort  $w$  ist, dann bezeichnen wir mit  $\varphi_w$  die durch  $M$  berechnete (einstellige) partielle Funktion  $\{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ .

Zeigen Sie, dass die folgenden Wortmengen unentscheidbar sind:

- (i)  $\{u \mid \varphi_u \text{ ist injektiv} \}$
- (ii)  $\{u \mid \varphi_u \text{ ist nicht injektiv} \}$

Zeigen Sie außerdem, dass die Menge in (ii) semi-entscheidbar ist und folgern Sie daraus, dass die Menge in (i) nicht semi-entscheidbar ist.

**Aufgabe 30:**

- (i) Suchen Sie eine Lösung des Postschen Korrespondenzsystems  $((b, bbb), (ba, a), (babbb, ba))$ .
- (ii) Zeigen Sie, dass das Postsche Korrespondenzproblem in Bezug auf Systeme, deren Wörter aus  $\{a\}^*$  stammen, entscheidbar ist.