

# Parkettierung eines Rechtecks mit zwei Karas

---

## Horst Müller

Institut für Informatik 3  
Universität Erlangen-Nürnberg  
Martensstr. 3  
D-91058 Erlangen

**Über die Konstruktion von zwei  
identischen Kara-Käfern, die ein endliches,  
durch Bäume begrenztes Rechteck mit  
Blättern pflastern (parkettieren)**

---

### Vorbemerkung:

- Von Nievergelt wurde die folgende Frage gestellt: Können zwei identische Karas gemeinsam ein endliches Rechteck mit Blättern belegen, ohne sich gegenseitig zu behindern/stören?

Im Folgenden wird ein Algorithmus beschrieben, nach dem zwei Karas beliebige rechteckige Gebiete parkettieren können. Der Algorithmus hat drei Phasen:

1. In der ersten Phase wird ein Kreuz mit Blättern belegt.
2. In der zweiten Phase wartet Kara "aktiv" darauf, dass auch der andere Kara sein Kreuz gebildet hat.
3. In der dritten Phase belegt Kara die vier Rechtecke, die eine Ecke mit seiner Kreuzmitte gemeinsam haben (im Gegenuhrzeigersinn) mit Blättern. Es kann passieren, dass zwei Karas ein Rechteck gemeinsam beblättern.

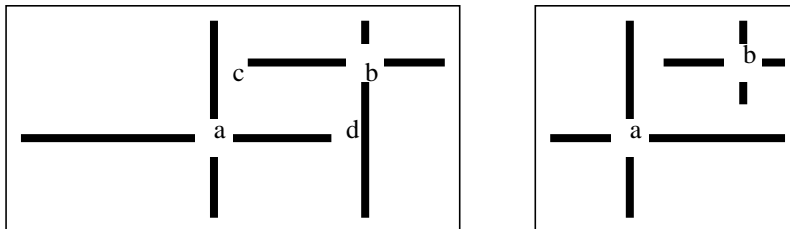
Die zulässigen Startpositionen sind etwas eingeschränkt (nicht auf einer achsenparallelen Linie und nicht zu dicht benachbart (Abstand (1,1)). Vermutlich ist der Algorithmus auch für drei Karas korrekt.

Eine leichte Modifikation des Algorithmus kann auch dazu verwendet werden, dass sich zwei Karas treffen. In Phase 2 muss sich Kara dann merken, in welchem seiner Quadranten der andere Kara seinen Startpunkt hat und braucht nur das Beblättern im gemeinsamen Teilrechteck gemäß Phase 3 zu beginnen und solange fortzusetzen, bis er auf den anderen Kara trifft, der ja das gleiche tut.

## 1.0 Die Kreuzbildung

---

Kara erzeugt (im Gegenuhrzeigersinn) in alle vier Himmelsrichtungen einen beblätterten Strahl, bis er auf einen Baum (Rechteckrand), einen andern Kara oder ein Blatt (von einem anderen Kara abgelegt) vor sich trifft. Die Kreuzmitte bleibt unbeblättert. Das führt (bei zwei Karas) zu einer der folgenden (oder ähnlichen) Formen



Dabei wird das Gesamt-Rechteck in (meist sieben) Teilrechtecke unterteilt. Die Startpunkte der Karas sind mit a bzw. b gekennzeichnet. Phase 1 besteht aus 29 Zuständen.

## 2.0 Das aktive Warten

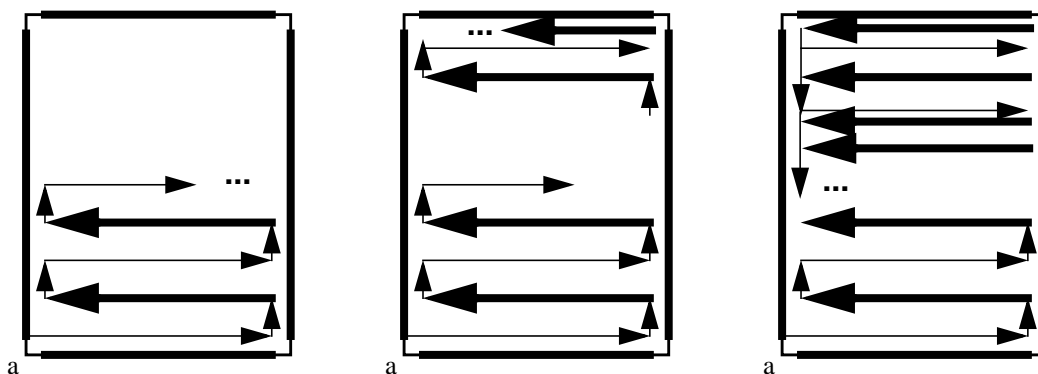
---

Da die Kreuze verschieden groß ausfallen können und auch über die Geschwindigkeit der Karas keine Voraussetzung gemacht werden soll, können die Karas für ihre Kreuzbildung verschieden lange brauchen. Würde ein Kara bereits mit der in Abschnitt 3 beschriebenen Rechteckparkettierung beginnen, während der andere sich noch in der Kreuzbildungsphase befindet, so würde die Rechteckparkettierung eventuell wegen unvollständiger Teilrechteckränder zu Fehlverhalten führen. Um sicherzustellen, dass beide Karas ihr Kreuz fertig haben, wird diese zweite Phase des aktiven Wartens eingeschoben. Kara läuft weiterhin auf seinem Kreuz (im Gegenuhrzeigersinn) herum, bis er zwei Treffpunkte mit der Spur des anderen Karas gefunden hat (bei c und d). Phase 2 besteht aus 30 Zuständen

## 3.0 (Gemeinsame) Rechteckparkettierung I

---

Nachdem beide Karas sicher sind, dass der andere auch sein Kreuz gebildet hat, werden die vier um den Startpunkt herum liegenden Teilrechtecke (der Reihe nach im Uhrzeigersinn) auf folgende Weise mit Blättern bedeckt, sofern nicht schon der andere Kara ein solches Teilrechteck beblättert hat: das Verfahren wird für das nord-östliche Rechteck beschrieben. Zunächst werden die 2., 4., ... Zeile mit Blättern belegt, bis die nord-östliche Ecke des Rechtecks erreicht wird. Beim zurück Laufen werden die dazwischen liegenden Zeilen beblättert. Am Ende dieses Abschnitts gelangt Kara wieder zur Kreuzmitte (bei a).



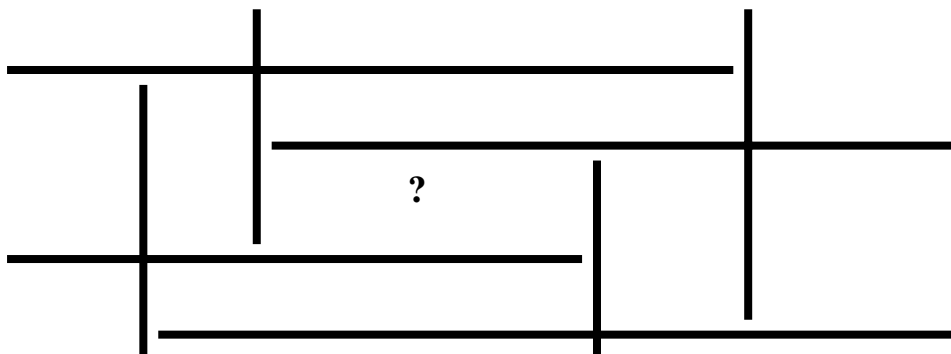
Sind beide Karas am selben Rechteck beteiligt, so fangen sie (zu eventuell unterschiedlichen Zeitpunkten) in diagonal gegenüber liegenden Ecken an und treffen sich irgendwann im Rechteck bei der Abarbeitung des vorgenannten Verfahrens. Das Verfahren ist so robust, dass dann beide umkehren und nur ihren 'Teil' des Rechtecks beblättern. Phase 3 besteht aus 23 Zuständen.

---

#### 4.0 Drei bzw. vier Karas

---

Bei drei Karas funktioniert das Verfahren vermutlich in sehr vielen Fällen auch. Problematisch ist die Wartephase. Bei vier Karas taucht als Schwierigkeit möglicherweise ein Rechteck (?) auf, das keine Ecke in einem Startpunkt eines Karas hat.



---

#### 5.0 Details der Implementierung

---

Variable  $i$  zeigt die bereits erkannten Blätter ( $i-1$ ) des anderen Kara an ( $i= 1, 2, 3$ ).

Variable  $j$  gibt die Nummer des momentanen Strahls an ( $j = 1,2,3,4$ ).

##### Zustände mit Erläuterung

##### 5.1 Phase 1: Kreuz bilden

|            |   |
|------------|---|
| p1i.Startj | ( $i-1$ ) Blätter vom anderen Kara erkannt, <b>Start</b> des $j$ -ten Strahls       |
| p1i.vorj   | Auf Strahl $j$ <b>vorwärts</b> , bereits ( $i-1$ ) Blätter vom anderen Kara erkannt |
| p1i.zurj   | Auf Strahl $j$ <b>zurück</b> , bereits ( $i-1$ ) Blätter vom anderen Kara erkannt   |
| p1.FSStop  | Fehlerstop, sollte nicht erreicht werden  |

##### 5.2 Phase 2 : aktives Warten

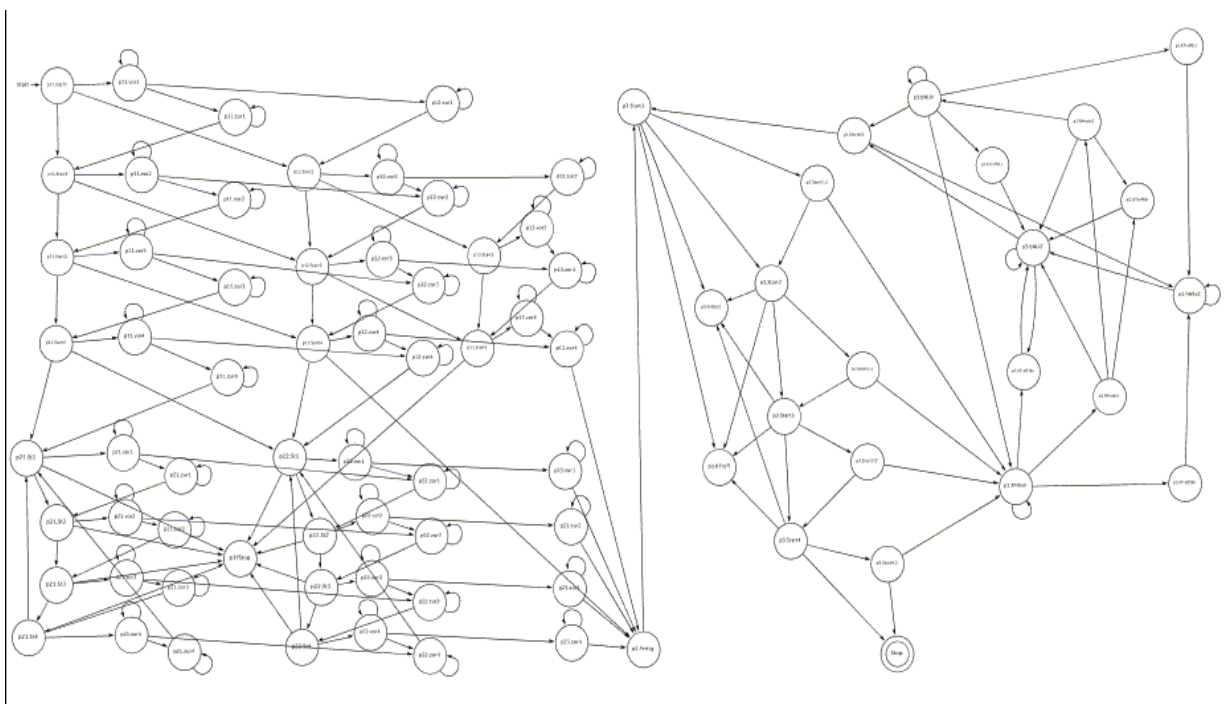
|           |   |
|-----------|---|
| p2i.Stj   | Start auf Strahl $j$ , bereits ( $i-1$ ) Blätter vom anderen Kara erkannt           |
| p2i.vorj  | Auf Strahl $j$ <b>vorwärts</b> , bereits ( $i-1$ ) Blätter vom anderen Kara erkannt |
| p2i.zurj  | Auf Strahl $j$ <b>zurück</b> , bereits ( $i-1$ ) Blätter vom anderen Kara erkannt   |
| p2.FSStop | Fehlerstop, sollte nicht erreicht werden  |

##### 5.3 Phase 3: Teilrechteck parkettieren

|             |   |
|-------------|---|
| p3.Startj   | Start ins Rechteck rechts von Strahl $j$                  |
| p3.Startj.2 | Hilfszustand beim Start                                   |
| p3.frNReV   | <b>f</b> rei <b>n</b> ach <b>r</b> echts <b>v</b> orwärts |

- p3.frNReZ      **f**rei **n**ach **r**echts **z**urück
- p3.RWende1    Wende am **r**echten Rand des Teilrechtecks, 1. Teil
- p3.RWende2    Wende am **r**echten Rand des Teilrechtecks, 2. Teil
- p3.bNLiV      **B**latt legend **n**ach **l**inks **v**orwärts
- p3.bNLiZ      **B**latt legend **n**ach **l**inks **z**urück
- p3.LWendeZ    Wende am **l**inken Rand des Teilrechtecks **z**urück
- p3.KTreff      Fehler Treffen eines Karas
- p3.Fehler1    Fehler, sollte nicht erreicht werden
- p3.KTreff1Re   Treffen eines Karas rechts am Rand
- p3.KTreff2Re   Treffen eines Karas rechts am Rand
- p3.KTreff1Li   Treffen eines Karas links am Rand
- p3.KTreff2Li   Treffen eines Karas links am Rand
- p3.KTreffW    Treffen eines Karas bei der Wende

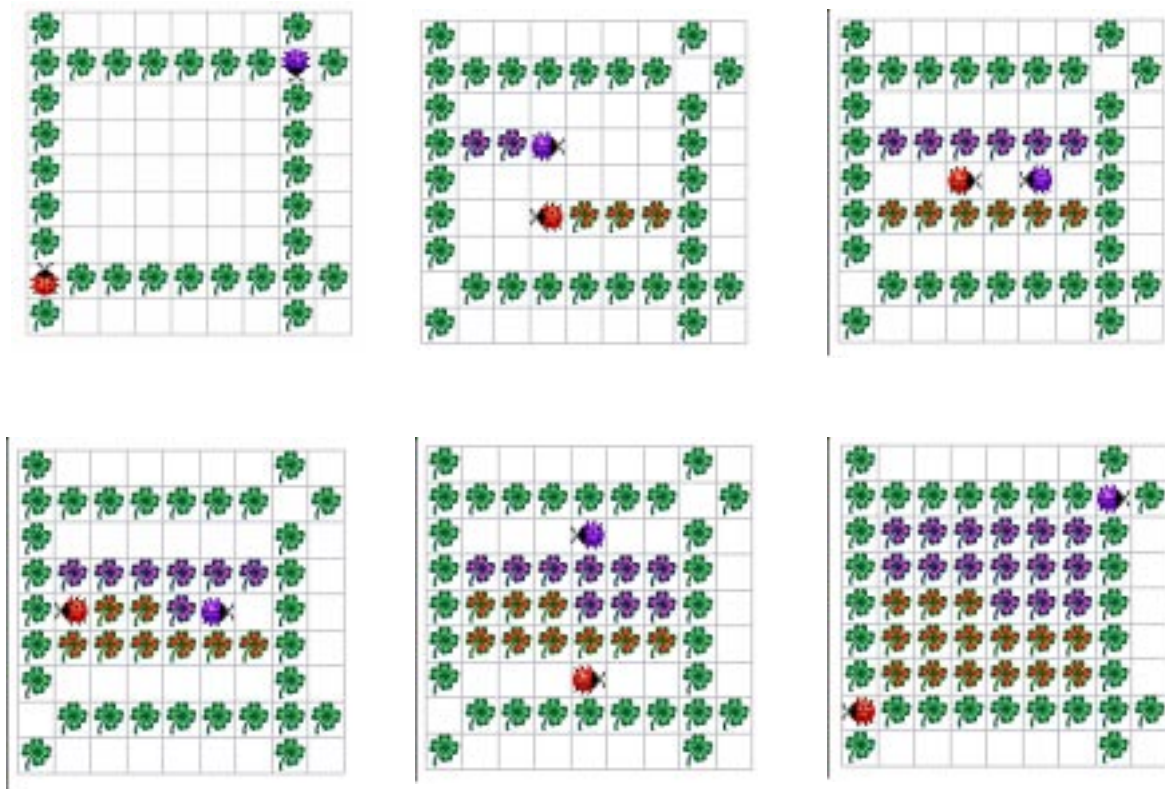
Vereinfachter Automatengraph::



## 6.0 Beispiele

---

TABELLE 1. Zwei Kara's in demselben Teil-Rechteck



## 7.0 Referenzen/Literatur

---

Informationen zu Multikara finden sich unter <http://www.educeth.ch/informatik/karatojava/kara/information.html>